LIVIU PÂRŞAN

MATEMATICĂ

probleme şi exerciţii pentru clasele IX-X

CORINT

Cuprins

1 Mulțimi, relații, funcții

1. Să se rezolve, în mulțimea numerelor naturale, ecuația: $\dfrac{x}{y} = x - y$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $x + y + 2xy = 83$.

3. Să se demonstreze că $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$:
a) $(x + y)^3 - x^3 - y^3$ se divide la 3;
b) $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ se divide la 5;
c) $(x + y)^7 - x^7 - y^7$ se divide la 7.

4. Determinați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât numărul $\sqrt{k^2 - 5k}$ să fie natural.

5. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, demonstrați că $7^n - 6^n$ nu poate fi pătrat perfect.

6. Pentru ce $n \in \mathbb{N}$, fracția: $f = \dfrac{\left(n^2 + 3n + 1\right)\left(n^2 + 3n + 3\right)}{\left(n^2 + 3n + 2\right)\left(n^2 + 3n + 4\right)}$,

se poate simplifica?

7. Demonstrați că există o infinitate de triplete $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Q}^3$ care verifică ecuația: $x^4 + y^4 + z^4 = 2$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $|x - 1| \cdot |x - 4| = |x + 1| \cdot |x + 4|$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\big||x - 3| - x + 1\big| = 6 - x$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: $|x + 2| \cdot |x + 3| \geqslant |x + 1| \cdot |x + 6|$.

11. Fie trinomul de gradul doi: $y = x^2 - 2(4m + 3)x + 6m + 7$.
Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât trinomul să fie pătrat perfect.

12. Să se determine $p \in \mathbb{N}$ astfel încât ecuația: $x^2 - px + p - 1 = 0$ să admită rădăcinile x_1 și x_2, unde $x_1 = 2x_2$.

13. Determinați $k \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația:
$x^2 - 4(k^2 + 1)x + 16k^4 - 16k^2 + 4 = 0$ să aibă rădăcini egale.

14. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că parabola de ecuație:
$y = ax^2 + bx + c$, verifică relațiile: $y(1) = 0, y(-1) = 1, y(2) = 2$.

15. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației:
$x^2 - px + 12 = 0$, să verifice relația: $|x_1 - x_2| = 1$.

16. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât parabola de ecuație: $y = x^2 + mx + n$, să fie tangentă axei $x'x$.

17. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât trinomul de gradul doi: $y = x^2 + mx + 1$, să fie strict pozitiv pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

18. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuațiile:
$x^2 - mx + (m + 1) = 0$ și $x^2 - (m - 1)x + (2m - 6) = 0$,
au o rădăcină comună.

19. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numărul real $a = \sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}$. Calculați $[a]$.

20. Calculați partea întreagă a numărului real: $a = \left(\sqrt{10} + \sqrt{11}\right)^2$.

21. Să se calculeze partea întreagă a numărului real: $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$, unde a conține n radicali.

22. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $[10x + 1] = 11x$.

23. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $[3x] = 2x$.

24. Demonstrați că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} = 1$.

25. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$.

26. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$.

27. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[x\cdot[x]\right]=1$.

28. Să se calculeze partea întreagă a numărului real: $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{k}}$.

29. Să se calculeze suma: $S_n(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+4}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{x+2^{n-1}}{2^n}\right]$,

unde $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$.

30. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases}2\cdot[x]+3\cdot[y]=8\\3\cdot[x]-[y]=1\end{cases}$.

31. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases}2\cdot\{x\}-3\cdot\{y\}=1\\2\cdot\{x\}+4\cdot\{y\}=2\end{cases}$.

32. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1{,}1\\y+[z]+\{x\}=2{,}2\\z+[x]+\{y\}=3{,}3\end{cases}$.

33. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât: $(f\circ f)(x)=2x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
a) Să se calculeze $f(1)$.
b) Să se dea un exemplu de astfel de funcție.

34. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x|$. Să se arate că f este bijectivă și să se determine f^{-1}.

35. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. Să se demonstreze că f este inversabilă și să se determine f^{-1}.

36. Fie funcția $g:[-1,+\infty)\to[-1,+\infty)$, $g(x)=x^2+2x$. Să se demonstreze că funcția g este inversabilă, apoi să se determine g^{-1}.

37. Să se arate că funcția $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=x+2\sqrt{x}$ este bijectivă. Care este inversa funcției f?

38. Fie funcția $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$. Să se arate că f este impară.

39. Să se demonstreze că există două funcții $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodice cu perioada principală 1, astfel încât funcția $f+g$ are perioada principală $\dfrac{1}{2}$.

40. Să se arate că funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dată de expresia:

$$f(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+1}}}$$, este constantă.

41. Să se arate că funcția $f: \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, dată de expresia:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}{1+\sin x+\cos x}$$, este constantă.

42. Construiți graficul funcției:

$y=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

43. Pentru $x > 0$ determinați minimul funcției: $f(x)=2^x+2^{\frac{1}{x}}$.

44. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=mx^2+x+1$ să fie bijectivă.

45. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=4x^3-3x^4+3$ nu este injectivă.

46. Există două funcții care nu sunt injective pentru care suma lor este o funcție bijectivă?

47. Construiți graficul funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=x^2+|x|$.

48. Construiți graficul funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=|x|+|x+1|-|x+2|$.

49. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ funcția: $\{x\}=[x]$.

50. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $[2x]=[4x]$.

2 Radicali; ecuații și inecuații raționale

51. Să se arate că: $\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)}=1$.

52. Să se calculeze: $a=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

53. Să se screi sub formă mai simplă expresia:

$E=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

54. Demonstrați egalitatea: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

55. Se dă $a=\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}}$. Să se calculeze: $a^3-3a=14$.

56. Să se demonstreze egalitatea: $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$.

57. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{|x+2|-|x|}=|x+1|$.

58. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{8x+6}+\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+10}+\sqrt{10x+1}$.

59. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația: $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{1}{x}$.

60. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{3x+1}+1=\sqrt{8x+1}$.

61. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{1+x}=2-x$.

62. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

63. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6}=18$.

64. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

65. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

66. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$.

67. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}=0$.

68. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-x}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}=1$.

69. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuația: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{1984}$.

70. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[4]{80+x}+\sqrt[4]{2-x}=4$.

71. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^2\cdot\sqrt{1-x^2}=|x|^3-|x|+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

72. Pentru ce $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, are loc egalitatea:

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[n]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}\ ?$$

73. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: $\sqrt{1-x^2}\leqslant x^2$.

74. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: $\sqrt{3x^2+2x+1}\leqslant|x|+1$.

75. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: $x\leqslant\sqrt{x+2}$.

76. Să se determine $a\in\mathbb{N}^*$ astfel încât: $a<\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}<a+1$.

77. Pentru $m\in\mathbb{R}$, $m>1$, se consideră numerele reale:

$$a=\sqrt{\frac{m}{m+1}}+\sqrt{\frac{m+1}{m}} \text{ și } b=\sqrt{\frac{m}{m-1}}+\sqrt{\frac{m-1}{m}}.$$

Care dintre aceste numere este mai mare?

3 Egalități și inegalități

78. Numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ verifică relațiile:
$2a \geqslant b+c$, $2b \geqslant c+a$ și $2c \geqslant a+b$.
Să se arate că $a=b=c$.

79. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci:
$\max\{a+c, b+d\} \leqslant \max\{a, b\} + \max\{c, d\}$.

80. Dacă $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, demonstrați că:
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$.

81. Fie $a, b, x, y \geqslant 0$ numere reale.

Să se demonstreze că: $\left(a \cdot \frac{x}{y} + b\right)^2 + \left(a \cdot \frac{y}{x} + b\right)^2 \geqslant 2(a+b)^2$.

82. Dacă $x \geqslant 1$ și $y \geqslant 1$ numere reale, să se arate că:

$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leqslant xy$.

83. Fie $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $c \geqslant 0$ numere reale. Să se arate că:
$a^4+b^4+c^4 \geqslant ab^3+bc^3+ca^3$.

84. Pentru ce $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:
$7+11+15+\ldots+(4n+7) = n(2n+9)+7$?

85. Demonstrați că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$x^{12} - x^9 + x^4 - x + \frac{3}{4} > 0$.

86. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația: $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$.

87. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația: $x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}$.

88. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ care verifică ecuația: $(2x+1)^2 + y^2 + (y-2x)^2 = \frac{1}{3}$.

89. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația: $y^4 + 2x^4 + 1 = 4x^2y$.

90. Există $x, y, z > 0$ astfel încât:

$$\begin{cases} xyz(x+y)(y+z)(z+x) = 1 \\ (xy+yz+zx)(x+y+z) = 2 \end{cases}?$$

91. Determinați reale strict pozitive a, b, c care verifică relația:

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = \frac{3}{4}.$$

92. Fie $a, b, c, d \in (0, +\infty)$ astfel încât $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$. Demonstrați că $a = b = c = d$.

93. Fie $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât au loc relațiile: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3$.

Să se arate că: $x = y = z$.

94. Dacă sunt date $a, b \in \mathbb{R}$, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
$(x + 2a - 3b)^3 + (2x - 3a + b)^3 + (-3x + a + 2b)^3 = 0$.

95. Determinați rădăcina reală a ecuației: $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$.

96. Dacă $a \geqslant 0$ este număr real, să se arate că: $1 + \dfrac{a}{2 + \frac{a}{2}} \leqslant \sqrt{1+a}$.

97. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că: $(1+a^2)(1+b^2) \geqslant 2\left|(a+b)(1-ab)\right|$.

98. Dacă $a, b \geqslant 0$ sunt numere reale, să se arate că: $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

99. Dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale, să se arate că:

$$\frac{a+b+c}{2} \geqslant \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

100. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt strict pozitive, să se demonstreze că:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) \geqslant \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right).$$

101. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se arate că:

$$\frac{a}{-a+b+c} + \frac{a}{a-b+c} + \frac{a}{a+b-c} \geqslant 3.$$

102. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se arate că:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

103. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea:

$$(1+abc)\cdot\left(\frac{1}{a+ab}+\frac{1}{b+bc}+\frac{1}{c+ac}\right)\geqslant 3.$$

104. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a, b, c \geqslant 1$, are loc relația:

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geqslant 10.$$

105. Dacă $a, b, c > 0$ sunt numerele reale, să se arate că:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

106. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze egalitatea:

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$
$$= n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2 + (n - 2) \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot n.$$

107. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, să se arate că:

$$\sqrt[4]{n^2-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)<1.$$

108. Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, să se arate că are loc relația:

$$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n - 1).$$

109. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci are loc relația: $\left(2-\frac{1}{n}\right)^n \geqslant n$.

110. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că are loc relația: $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

111. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ numere reale. Să se arate că:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

112. Dacă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este o permutare a mulțimii $(1, 2, \ldots, n)$, să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{k}\geqslant\frac{n(n+1)}{2}.$$

113. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că are loc relația:

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\geqslant\frac{n(n+1)}{2}.$$

114. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, și numerele strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ care verifică relațiile: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 3$ și $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 3$.

Aflați cea mai mare valoare pe care o poate lua n.

115. Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$. Arătați că:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geqslant 4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right).$$

116. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile:

$$n \leqslant \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n} \leqslant n^2.$$

117. Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \theta \in (0, \pi)$ are loc inegalitatea:

$$\left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\right| \leqslant n+1.$$

118. Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

$$1 \leqslant |\sin x| + |\cos x| \leqslant \sqrt{2}.$$

119. Numerele reale x, y verifică relația: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Să se demonstreze că:

a) $x \in [2, 4]$ și $y \in [1, 3]$;

b) $5 - \sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant 5 + \sqrt{2}$;

c) $14 - 2\sqrt{13} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 14 + 2\sqrt{13}$.

120. Numerele reale x, y, z verifică relațiile:

$x + y + z = 1$ și $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1$.

Să se afle maximul și minimul pentru x, y, z.

121. Dacă $a, b > 0$ sunt numere reale, să se determine minimul expresiei:

$$E(a, b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

122. Știind că $a, b, c, d > 0$, să se determine minimul expresiei:

$$E(a, b, c, d) = \sum \frac{a}{b+c+d} + \sum \frac{b+c+d}{a}.$$

123. Știind că $x > 0$, să se determine minimul funcției:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}.$$